Enseignant : Dr. Sylvain Bréchet
Examen : physique générale II
Date : vendredi 21 juin 2024
Durée : 9h15 - 12h45

1

Enoncé

N° SCIPER :

SECTION :

SALLE / PLACE : /

L'examen est constitué de 3 problèmes qui totalisent 57 points avec 4 points bonus additionnels. Chaque problème comporte un énoncé illustré et détaillé sur la page de gauche et des questions sur la page de droite. Les développements mathématiques et physiques d'un problème doivent être effectués et rédigés proprement sur les pages quadrillées à la fin du problème.

N°	VISA	POINTS
1		
2		
3		

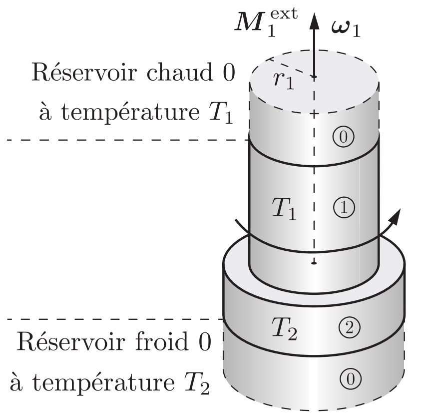
Consignes

- Préparer votre **carte Camipro**, la poser visiblement sur la table et vérifier votre **N° Sciper**.
- **Attendre** le début de l'épreuve **avant d'ouvrir** le cahier d'examen.
- Le **formulaire** de l'examen (1 page A4 recto-verso) est autorisé.
- L'utilisation de tout **appareil électronique** est interdite.
- Un **dictionnaire bilingue** non annoté est autorisé pour les étudiant.e.s **non francophones**.
- Effectuer les **développements mathématiques et physiques** d'un problème sur les **pages quadrillées** à la fin du problème.
- Retranscrire les **réponses** sur les pointillés sous chaque question dans les espaces réservés à cet effet.
- Utiliser un **stylo** à encre **noir ou bleu foncé** (éviter d'utiliser un crayon) et effacer proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Ne **pas dégrafer** le cahier d'examen et laisser le **tableau** et les **cases blanches vides**.
- Les feuilles de papier **brouillon** ne seront **pas ramassées** et **pas corrigées**.
- Il est recommandé de résoudre les questions **bonus** à la fin de l'examen si le temps le permet.

Problème 1 : Frottement stationnaire entre des cylindres métalliques (19 points)

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19

Laisser les cases blanches vides



Un système thermodynamique, formé de deux cylindres métalliques rigides de même axe de symétrie vertical, est en régime stationnaire. Le sous-système 1 est constitué du cylindre supérieur qui est entraîné par un moment de force extérieure $\boldsymbol{M}_1^{\text{ext}}$ et tourne à vitesse angulaire constante $\boldsymbol{\omega}_1 = \textbf{cste}$ dans le sens trigonométrique autour de l'axe de symétrie en vue d'avion. Le cylindre inférieur est le sous-système 2 qui est maintenu immobile.

En régime stationnaire, le moment de force de frottement exercé par le cylindre inférieur 2 sur le cylindre supérieur 1 de rayon r_1 est $\boldsymbol{M}_1^{\text{fr}} = -\lambda_1 \, r_1 \, \boldsymbol{\omega}_1$ où $\lambda_1 > 0$. Le moment cinétique du cylindre supérieur est $\boldsymbol{L}_1 = I_1 \, \boldsymbol{\omega}_1$ où $I_1 > 0$ est son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation.

Les cylindres 1 et 2 sont des sous-systèmes simples, rigides, constitués de N_1 et N_2 moles d'atomes respectivement. L'interface entre les cylindres est diatherme et imperméable. Le cylindre 1 est maintenu à température constante T_1 par le réservoir chaud 0 et le cylindre 2 est maintenu à température constante T_2 par le réservoir froid 0. Ces deux réservoirs de chaleur 0 sont considérés comme l'environnement du système. Le cylindre supérieur a la même vitesse angulaire que le réservoir chaud avec lequel il est à l'équilibre thermique. Les températures des cylindres satisfont la relation d'ordre $T_1 > T_2$.

Etant donné que le système est en régime stationnaire, l'énergie, l'énergie cinétique, l'énergie interne et l'entropie de chaque cylindre ainsi que le moment cinétique du cylindre supérieur sont des constantes.

Les réponses doivent être exprimées en termes des températures T_1 et T_2, des nombres de moles d'atomes N_1 et N_2, du moment d'inertie I_1, de la norme de la vitesse angulaire ω_1, du coefficient λ_1, du rayon r_1, de la constante des gaz parfaits R et des grandeurs scalaires spécifiées de l'énoncé de chaque question.

Questions et réponses ci-contre, calculs sur les pages quadrillées suivantes

1. (**2 points**) Ecrire l'énergie totale E du système.

   $E =$ ....

2. (**3 points**) Déterminer la puissance extérieure $P^{\,\text{ext}}$ exercée sur le système. En déduire le courant de chaleur total I_Q entre le système et les réservoirs de chaleur (l'environnement) en régime stationnaire.

   $P^{\,\text{ext}} =$ ....

   $I_Q =$ ....

3. (**3 points**) Déterminer le courant d'entropie I_S entre le système et les réservoirs de chaleur et la source d'entropie Σ_S du système en termes des courants d'entropie $I_S^{1\to 2}$ et $I_S^{2\to 1}$ entre les sous-systèmes en régime stationnaire.

   $I_S =$ ....

   $\Sigma_S =$ ....

4. (**3 points**) Montrer que la somme des courants de chaleur $I_Q^{1\to 2}$ et $I_Q^{2\to 1}$ entre les deux cylindres en régime stationnaire s'écrit,

   $$I_Q^{1\to 2} + I_Q^{2\to 1} = \lambda_1\, r_1\, \omega_1^2$$

5. (**2 points**) Montrer que les courants de chaleur $I_Q^{1\to 2}$ et $I_Q^{2\to 1}$ entre les deux cylindres en régime stationnaire satisfont la relation suivante,

   $$T_1\, I_Q^{1\to 2} + T_2\, I_Q^{2\to 1} > 0$$

6. (**3 points**) Durant un intervalle de temps quelconque $\Delta t_{i\to f} = t_f - t_i$, déterminer en régime stationnaire la chaleur échangée $Q_{i\to f}^{+}$ entre le cylindre supérieur et le réservoir chaud à température T_1, la chaleur échangée $Q_{i\to f}^{-}$ entre le cylindre inférieur et le réservoir froid à température T_2, et le travail $W_{i\to f}^{\,\text{ext}}$ effectué sur le système en termes des courants de chaleur $I_Q^{1\to 2}$ et $I_Q^{2\to 1}$ entre les cylindres.

   $Q_{i\to f}^{+} =$ ....

   $Q_{i\to f}^{-} =$ ....

   $W_{i\to f}^{\,\text{ext}} =$ ....

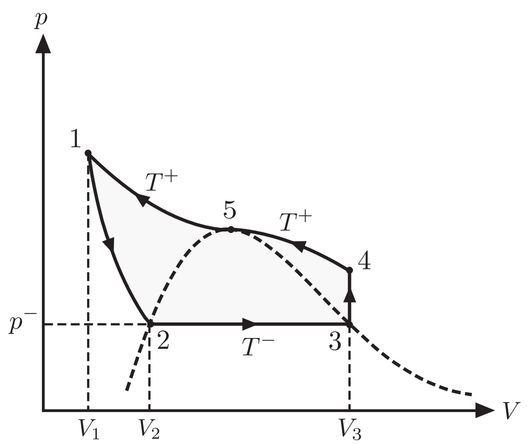
7. (**3 points**) Déterminer l'énergie libre $F\,(T_1, T_2)$ du système.

   $F\,(T_1, T_2) =$ ....

Problème 2 : **Cycle calorifique critique d'un fluide de van der Waals** **(21 points)**

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

Laisser les cases blanches vides



Un fluide de van der Waals constitué de N moles est contenu dans un cylindre fermé. Le cycle calorifique que subit ce fluide biphasique est formé de cinq processus :

- $1 \to 2$ détente adiabatique réversible,
- $2 \to 3$ vaporisation à la pression p^- et la température T^- de la source froide,
- $3 \to 4$ compression isochore réversible à volume V_3,
- $4 \to 5$ compression isotherme réversible à la température T^+ de la source chaude,
- $5 \to 1$ compression isotherme réversible à la température T^+ de la source chaude.

Le cycle passe par le point critique qui correspond à l'état 5 sur le diagramme (p, V). La courbe de saturation est représentée en traitillé. L'équation d'état du fluide de van der Waals est donnée par,

$$p = \frac{NRT}{V - Nb} - \frac{a\,N^2}{V^2}$$

et son énergie interne et sa différentielle s'écrivent,

$$U = c\,NRT - \frac{a\,N^2}{V} \qquad \text{et} \qquad dU = c\,NR\,dT + \frac{a\,N^2}{V^2}\,dV$$

Les réponses doivent être exprimées en termes de la température T^+ de la source chaude, de la température T^- de la source froide, des volumes V_1, V_2, V_3, de la pression p^- et du nombre N de moles de fluide, de la constante des gaz parfaits R, des paramètres a, b et c et des grandeurs scalaires spécifiées dans l'énoncé de chaque question.

Questions et réponses ci-contre, calculs sur les pages quadrillées suivantes

1. (**3 points**) Esquisser qualitativement le diagramme (T, S) du cycle sur l'énoncé ci-contre en indiquant les états 1 à 5 et en définissant l'orientation des processus avec des flèches.

2. (**2 points**) Durant un processus quelconque, montrer que la différentielle de l'entropie dS s'écrit,

$$dS = \frac{c\,N R\,dT}{T} + \frac{N R\,dV}{V - Nb}$$

3. (**3 points**) Calculer le travail $W_{4\to5}$ effectué sur le fluide de van der Waals par l'environnement durant la compression isotherme $4 \to 5$ à température T^+. *Indice :* si vous ne parvenez pas à identifier le volume critique V_5, supposez le connu.

   $W_{4\to5} =$ ....

4. (**2 points**) Calculer la variation d'énergie libre $\Delta F_{4\to1}$ du fluide de van der Waals durant la compression isotherme $4 \to 1$ à température T^+.

   $\Delta F_{4\to1} =$ ....

5. (**2 points**) Déterminer le coefficient de compressibilité isotherme χ_T et la chaleur latente molaire de vaporisation $\ell_{\ell\to g}$ au point critique dans l'état 5 quasiment sans faire de calcul.

   $\chi_T =$ ....

   $\ell_{\ell\to g} =$ ....

6. (**4 points**) Calculer la chaleur $Q_{2\to3}$ fournie au liquide de van der Waals durant la vaporisation et l'exprimer explicitement en termes de la pression de vaporisation p^-. En déduire la chaleur latente molaire de vaporisation $\ell_{\ell\to g}$ qu'il faut fournir au liquide de van der Waals pour qu'il se transforme entièrement en gaz durant la vaporisation $2 \to 3$.

   $Q_{2\to3} =$ ....

   $\ell_{\ell\to g} =$ ....

7. (**3 points**) Durant la détente adiabatique $1 \to 2$, montrer que la température T et le volume V du fluide de van der Waals satisfont la relation suivante,

$$T\,(V - Nb)^{\gamma - 1} = \text{cste} \qquad \text{où} \qquad \gamma = \frac{c+1}{c}$$

8. (**BONUS** : **2 points**) La vaporisation peut être modélisée comme une réaction chimique a de vitesse de réaction Ω_a entre le liquide, considéré comme le réactif de coefficient stœchiométrique $\nu_{a\ell}$ et de potentiel chimique μ_ℓ, et le gaz, considéré comme le produit de coefficient stœchiométrique ν_{ag} et de potentiel chimique μ_g. Déterminer l'affinité $\mathcal{A}_a$ de la réaction chimique et en déduire la source d'entropie Σ_S durant la vaporisation.

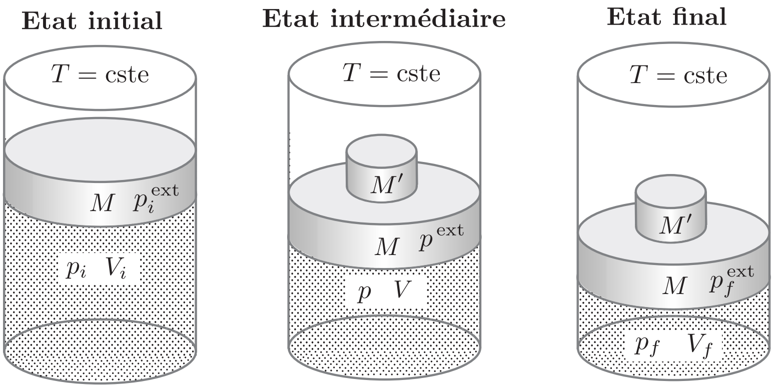
   $\mathcal{A}_a =$ ....

   $\Sigma_S =$ ....

Problème 3 : **Compression isotherme irréversible d'un gaz parfait** **(21 points)**

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

Laisser les cases blanches vides



On modélise la compression isotherme d'un système thermodynamique fermé constitué de N moles de gaz parfait enfermé dans un cylindre vertical par un piston de masse M et d'aire A. Le cylindre est placé dans une enceinte dans laquelle on a fait le vide. Il n'y a donc pas de pression atmosphérique à considérer dans ce problème. De plus, le système est maintenu à température constante T par contact avec un réservoir de chaleur.

Dans l'état initial i, avant la compression, le gaz parfait de pression p_i est à l'équilibre mécanique avec le piston qui exerce une pression p_i^{ext} sur le gaz. On pose alors un poids de masse M' sur le piston ce provoque la compression du gaz parfait à pression p due à la pression p^{ext} exercée sur le gaz par le piston et le poids : c'est l'état intermédiaire de compression. Dans l'état final f, après la compression, le gaz parfait de pression p_f a atteint l'équilibre mécanique avec le piston et le poids qui exercent une pression p_f^{ext} sur lui.

$$p_i = p_i^{\text{ext}} \qquad \text{et} \qquad p < p^{\text{ext}} = p_f^{\text{ext}} \qquad \text{et} \qquad p_f = p_f^{\text{ext}}$$

Le travail effectué de manière irréversible par le piston et le poids sur le gaz durant la compression isotherme de l'état initial i à l'état final f s'écrit,

$$W_{i\to f} = -\int_i^f p^{\text{ext}}\, dV$$

Durant la compression isotherme, la source d'entropie du système s'écrit,

$$\Sigma_S = \frac{1}{T}\left(p - p^{\text{ext}}\right)\dot{V}$$

L'entropie générée de manière irréversible dans le système lors de la compression isotherme est définie comme,

$$S_{\Sigma\, i\to f} = \int_i^f \delta S_\Sigma = \int_{t_i}^{t_f} \Sigma_S\, dt$$

Les réponses doivent être exprimées en termes de la masse M du piston, de la masse M' du poids, du nombre de moles N de gaz parfait, de la température T, de la constante des gaz parfaits R et des grandeurs spécifiées dans l'énoncé de chaque question.

Questions et réponses ci-contre, calculs sur les pages quadrillées suivantes

1. (**3 points**) Montrer que la variation d'entropie s'écrit en fonction de la chaleur $Q_{i\to f}$ restituée au réservoir de chaleur durant la compression isotherme $i \to f$,

$$\Delta S_{i\to f} = \frac{Q_{i\to f}}{T} + S_{\Sigma\, i\to f}$$

2. (**3 points**) Montrer que les rapports de la pression finale p_f et de la pression initiale p_i ainsi que du volume final V_f et du volume initial V_i s'écrivent,

$$\frac{p_f}{p_i} = 1 + \frac{M'}{M} \qquad \text{et} \qquad \frac{V_f}{V_i} = \frac{M}{M+M'}$$

3. (**3 points**) Calculer le travail $W_{i\to f}$ effectué par le piston et le poids sur le gaz et la chaleur restituée $Q_{i\to f}$ au réservoir de chaleur durant la compression isotherme irréversible $i \to f$.

$W_{i\to f} =$ ....

$Q_{i\to f} =$ ....

4. (**2 points**) Calculer la variation d'entropie $\Delta S_{i\to f}$ du gaz parfait durant la compression isotherme irréversible $i \to f$.

$\Delta S_{i\to f} =$ ....

5. (**2 points**) Montrer que l'entropie $S_{\Sigma\, i\to f}$ générée de manière irréversible dans le système durant la compression isotherme irréversible $i \to f$ s'écrit,

$$S_{\Sigma\, i\to f} = NR\left(\frac{M'}{M} + \ln\left(\frac{M}{M+M'}\right)\right)$$

6. (**3 points**) Dans la limite où le rapport des masses est suffisamment faible,

$$\ln(1+x) \simeq x \qquad \text{où} \qquad x = \frac{M'}{M} \qquad \text{et} \qquad 0 < x \ll 1$$

montrer explicitement que la compression devient réversible et en déduire explicitement une relation entre les pressions p et p^{ext} dans ce cas.

....

7. (**3 points**) Calculer le travail $W^0_{i\to f}$ effectué sur le gaz par le piston et le poids durant une compression réversible $i \to f$ et montrer que les travaux effectués de manière réversible et irréversible sont égaux, c'est-à-dire $W^0_{i\to f} = W_{i\to f}$, dans la limite où le rapport des masses est suffisamment faible, c'est-à-dire $x = M'/M \ll 1$.

$W^0_{i\to f} =$ ....

8. (**BONUS : 2 points**) Montrer qu'en général la compression isotherme est irréversible explicitement à l'aide de l'entropie $S_{\Sigma\, i\to f}$.